

LA CONJETURA DE ALEXANDROV

JESÚS NÚÑEZ-ZIMBRÓN *

RESUMEN. En 1955 A. D. Alexandrov conjeturó que para cualquier superficie riemanniana compacta y sin frontera, el cociente entre su área y el cuadrado de su diámetro intrínseco tiene como máximo $\pi/2$ y éste se alcanza cuando la superficie corresponde a dos copias de un disco pegadas por la frontera. En este artículo expositivo, motivamos esta conjetura mostrando algunos aspectos sobre desigualdades del tipo isoperimétrico e ilustramos algunas técnicas recientes que se han utilizado para intentar resolver la conjetura de Alexandrov.

1. INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios, la geometría riemanniana ha proveído un contexto adecuado para plantear y resolver una gran cantidad de problemas de naturaleza métrica. Su estructura *local* hace posible usar naturalmente las herramientas típicas del cálculo diferencial e integral, y esto ha dado lugar a una gran cantidad de aplicaciones, por ejemplo a la física. Algunos años después de encontrar una aplicación sumamente importante en la Teoría de la Relatividad, durante las décadas de los veinte y treinta del siglo pasado, el estudio de los aspectos locales de las variedades riemannianas era la directiva de la investigación en geometría.

Sin embargo, a partir de los años cuarenta, muchos matemáticos se interesaron por las variedades riemannianas como objetos de interés intrínseco, y consideraron aquellos aspectos *globales* de la geometría riemanniana. Esto dió lugar a la rama de la geometría riemanniana llamada *geometría riemanniana global*. El objetivo de esta rama es clasificar (topológica, diferenciable, métricamente) familias de variedades que satisfacen ciertas condiciones, como por ejemplo el admitir ciertas cotas en su curvatura, volumen o diámetro. Desde su surgimiento, esta rama de la geometría ha avanzado increíblemente y se ha consolidado como una de las áreas de investigación que más impacto ha tenido dentro de la geometría y otras áreas de las matemáticas.

Aleksandr Danilovich Alexandrov (1912–1999) fue un matemático ruso que se interesó en este tipo de geometría, a la cual llamaba “geometría en grande” (en inglés, *in the large*). Alexandrov fue un gigante de la geometría cuyas ideas han influenciado la dirección que ha tomado la geometría como conjunto. Por ejemplo, hizo notar la importancia de considerar objetos *singulares*, como las superficies

* *Agradecimientos*: El autor agradece al Dr. Fernando Galaz-García por traer a su atención la Conjetura de Alexandrov y por su valiosa ayuda en la realización de este artículo. Asimismo, reconoce y agradece el financiamiento otorgado por UCMEXUS–CONACYT bajo el proyecto ‘*Alexandrov Geometry*’ con el cual se realizó este trabajo. El autor también agradece el apoyo amablemente otorgado por el proyecto PAPIME RR106915 ‘*Perspectivas Matemáticas*’.

que no necesariamente son diferenciables en todos lados (conos, poliedros, etc) las cuales estudió extensivamente. Probablemente una de las consecuencias más importantes del alcance de sus ideas es el uso que Grigori Perelman (uno de los alumnos más famosos de Alexandrov) dio a los llamados *espacios de Alexandrov* para demostrar la elusiva conjetura de Poincaré.

En este artículo expondremos algunos aspectos básicos de la geometría global de superficies riemannianas compactas y sin frontera, particularmente la relación que hay entre su área A y su diámetro D . Una conjetura muy famosa propuesta por Alexandrov ([1], ver también [2]) afirma que

$$\frac{A}{D^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

y que la igualdad se satisface si y sólo si la superficie en cuestión es una superficie degenerada obtenida al pegar dos copias de un disco unitario por su frontera.

En 1982 la conjetura fue incluida por Yau en su lista de los problemas abiertos más interesantes [20]. Sin embargo, la conjetura parece muy difícil de resolver. Se han planteado varios enfoques para intentar resolverla, logrando varios resultados parciales.

El objetivo de este artículo expositivo es motivar la conjetura de Alexandrov, a partir de ciertas desigualdades de *tipo isoperimétrico*, lo cual hacemos en la Sección 2. Posteriormente, en la Sección 3 bosquejamos algunos de los avances recientes que se tienen.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Desigualdades de tipo isoperimétrico	2
3. La conjetura de Alexandrov	4
3.1. Tetraedros	6
3.2. Estimado de Calabi-Cao	8
3.3. Estimado de Shioya	9
3.4. Superficies esféricamente simétricas	11
Referencias	13

2. DESIGUALDADES DE TIPO ISOPERIMÉTRICO

Comenzaremos considerando curvas *cerradas* y *simples* en el plano, es decir, funciones suaves

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tales que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y α no tiene otras autointersecciones. Recordemos que con estas hipótesis, y suponiendo que la derivada de α es distinta de cero en todos sus puntos, es posible definir su longitud como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Supondremos también que las curvas que consideramos tienen una longitud prescrita L . En este contexto, un problema clásico es el de encontrar aquella de estas curvas que acote la mayor área posible. Intuitivamente, la solución se obtiene cuando la curva en cuestión describe una circunferencia. A pesar de que este problema era conocido para los griegos y de lo intuitivo de esta solución, la primera demostración de este hecho fue dada en 1870 por Weierstrass, como corolario de su teoría variacional. Una prueba más directa es la de 1939 de Schmidt (ver [6]).

Teorema (Desigualdad isoperimétrica). *Sea C una curva cerrada y simple, suave por pedazos en el plano con longitud L y A el área de la región acotada por C . Entonces*

$$4\pi A \leq L^2$$

y la igualdad se obtiene si y sólo si C es una circunferencia.

Una pregunta natural es la de cómo generalizar este hecho (por ejemplo a dimensiones mayores). Una de las generalizaciones más naturales está dada por la *desigualdad isodiamétrica*, demostrada por Federer en 1969. La desigualdad está en términos de la medida de Lebesgue (ver por ejemplo [7] para las definiciones relevantes), papel que juega el área en el caso bidimensional. El sustituto para la longitud es el *diámetro (intrínseco)*. Recordemos que el diámetro de un espacio métrico (X, d) , está definido como

$$\text{Diam } X := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

A continuación enunciamos la desigualdad (ver [4] para una demostración).

Teorema (Desigualdad isodiamétrica). *Para todo subconjunto C de \mathbb{R}^n ,*

$$\mathcal{L}^n(C) \leq \omega_n \left(\frac{\text{Diam } C}{2} \right)^n,$$

donde \mathcal{L}^n denota a la medida de Lebesgue n -dimensional y ω_n a la medida de Lebesgue de una bola unitaria en \mathbb{R}^n .

La motivación para considerar este tipo de desigualdades es que suelen tener consecuencias importantes. Por ejemplo, la desigualdad anterior permite demostrar que la medida de Lebesgue coincide con la medida de Hausdorff en \mathbb{R}^n , hecho que resulta de gran utilidad ([7, Sección 2.2, Teorema 2]).

De manera un poco más general podemos considerar la siguiente situación. Sea \mathcal{K} una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^n ordenados por la inclusión. Queremos que \mathcal{K} esté conformada por objetos de interés geométrico. Por ejemplo, \mathcal{K} podría ser una familia de variedades con cierta cota de curvatura, ciertos complejos simpliciales, etc. Uno de los ejemplos que más interés ha generado es aquel en el que \mathcal{K} es la colección de subconjuntos compactos, convexos no vacíos de \mathbb{R}^n , equipados con la métrica intrínseca inducida. En breve comentaremos más acerca de esta familia.

Decimos que un funcional $\Sigma : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *funcional de tamaño* (cf. [11]) si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Σ es continuo,
- (ii) no es idénticamente cero,

- (iii) es homogéneo respecto a rescalar la métrica para cierto grado $k > 0$,
- (iv) es monótono creciente respecto a la inclusión, i.e., $K \subseteq M$ implica que $\Sigma(K) \leq \Sigma(M)$.

Ahora, podemos comparar cada par Σ, Σ' de funcionales de tamaño de grados de homogeneidad k y k' respectivamente, para tratar de obtener información sobre \mathcal{K} . Por ejemplo, en las desigualdades isoperimétrica e isodiamétrica enunciadas anteriormente, los funcionales de tamaño en cuestión son la medida de Lebesgue y el diámetro. En ese caso, el grado de homogeneidad de \mathcal{L}^n es n y el del diámetro es 1. En vista de esto, para cada par de funcionales de tamaño, podemos considerar el funcional

$$\mathcal{F}_{\Sigma, \Sigma'}(M) := \frac{\Sigma(M)^{k'}}{\Sigma'(M)^k}$$

definido para todo $M \in \mathcal{K}$ tal que $\Sigma'(M) \neq 0$. Notemos que $\mathcal{F}_{\Sigma, \Sigma'}(M)$ es invariante bajo rescalamientos. Así, el obtener desigualdades análogas a las anteriores para Σ y Σ' es equivalente a encontrar una cota para $\mathcal{F}_{\Sigma, \Sigma'}(M)$.

Hay un gran número de desigualdades de este tipo, algunas de ellas muy famosas, particularmente, en el caso en el que \mathcal{K} es la familia de subconjuntos compactos convexos no vacíos de \mathbb{R}^n . Estas desigualdades involucran varios funcionales de tamaño. Algunos ejemplos muy usados son el volumen V , el área A o en el caso en el que el subconjunto en cuestión sea una superficie diferenciable, tenemos por ejemplo a H , la curvatura media total. Las siguientes son desigualdades del tipo de $\mathcal{F}_{\Sigma, \Sigma'}$ que relacionan a los funcionales mencionados (cf. [4, Capítulo 4, Sec. 20.2]):

$$\begin{aligned} A^3 &\geq 36\pi V^2 \\ H^3 &\geq 48\pi^2 V \\ H^2 &\geq 4\pi A \\ \text{Diam}^3 &\geq \frac{6V}{\pi}. \end{aligned}$$

Dentro de las desigualdades previas, no hicimos mención de alguna en la que se relacione al área con el diámetro. En la siguiente sección nos centraremos en el caso en el que Σ es el área de una superficie y Σ' su diámetro.

3. LA CONJETURA DE ALEXANDROV

Motivados por el análisis de la sección anterior, en la que consideramos a los funcionales de tipo $\mathcal{F}_{\Sigma, \Sigma'}$, consideraremos ahora al funcional

$$\mathcal{F}(M, g) := \frac{A(M, g)}{(\text{Diam}(M, g))^2}$$

que a cada variedad riemannana (M, g) de dimensión n le asocia el cociente entre su volumen intrínseco n -dimensional y el cuadrado de su diámetro.

En dimensión 1, el área corresponde en realidad a la longitud, así que \mathcal{F} es constante con valor 1. En 1955 A. D. Alexandrov consideró el caso $n = 2$ y propuso la siguiente conjetura [1]. Ésta continúa abierta.

Conjetura (Alexandrov). *El funcional $\mathcal{F}(M, g)$ alcanza como máximo $\pi/2$. El máximo se realiza tomando M como el doble disco plano D_2^2 , es decir, la unión de dos discos unitarios planos, pegados a lo largo de sus fronteras mediante una isometría.*

Mencionamos nuevamente que \mathcal{F} es invariante bajo reescalamiento de la métrica, es decir, multiplicar a la métrica por una constante positiva. En otras palabras, la conjetura de Alexandrov es independiente del tamaño relativo de las superficies, es decir, es una pregunta de carácter *intrínseco*.

Una cota sencilla para \mathcal{F} se obtiene de aplicar el Teorema de comparación de Bishop ([14, Capítulo 9, Lema 35], a saber,

$$\mathcal{F}(M) \leq A_k(\text{Diam}(M)),$$

donde $A_k(\text{Diam}(M))$ es el área de una bola de radio $\text{Diam}(M)$ en la *forma espacial de curvatura k* , esto es, la superficie completa, simplemente conexa de curvatura seccional constante k . Explícitamente,

$$A_k(r) = \begin{cases} \pi r^2 & \text{si } k = 0 \\ 2\pi k^{-1}(1 - \cos \sqrt{k}r) & \text{si } k > 0 \\ 2\pi k^{-1}(1 - \cosh \sqrt{k}r) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

En el caso del doble disco plano D_2^2 , observemos que $A(D_2^2)$ es simplemente el doble del área del disco plano, es decir, 2π . Por otra parte, su diámetro coincide con la distancia que hay entre los centros de ambas copias del disco plano, i.e. 2. De modo que $\mathcal{F}(D_2^2) = \pi/2$. De hecho, es posible hacer cálculos similares sobre superficies degeneradas que se obtengan de tomar el doble de un dominio plano convexo, mostrando que la conjetura es cierta para éstas.

Otro punto importante a notar es que a diferencia de la desigualdad isodiamétrica, en este caso la esfera no realiza la igualdad. Su área es 4π , mientras que su diámetro es π . Por tanto,

$$\mathcal{F}(S^2) = 4/\pi < \pi/2$$

Más aún, podemos “aplastar” un poco ambos hemisferios de la esfera para obtener una superficie con \mathcal{F} mayor a la de la esfera unitaria redonda. Más explícitamente, consideremos $M_{1/2}$, el doble de la superficie de revolución generada por la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ al girar respecto al eje y . El área y el cuadrado del diámetro de esta superficie son

$$\begin{aligned} A(M_{1/2}) &= 2 \int_{-1}^1 2\pi|x| \left(1 + \frac{x^2}{4(1-x^2)}\right)^{1/2} dx \approx 8,67188, \\ (\text{Diam}(M_{1/2}))^2 &= \left(\int_{-1}^1 \left(1 + \frac{x^2}{4(1-x^2)}\right)^{1/2} dx \right)^2 \approx 5,86661. \end{aligned}$$

De modo que $\mathcal{F}(M_{1/2}) \approx 1,47817 > 4/\pi$. De esta manera podemos concluir que $\mathcal{F}(M_{1/2}) > \mathcal{F}(S^2)$. Podemos continuar, considerando otra superficie $M_{1/4}$, dada por el doble de la superficie de revolución generada al rotar $\frac{1}{4}f(x)$. Es fácil ver

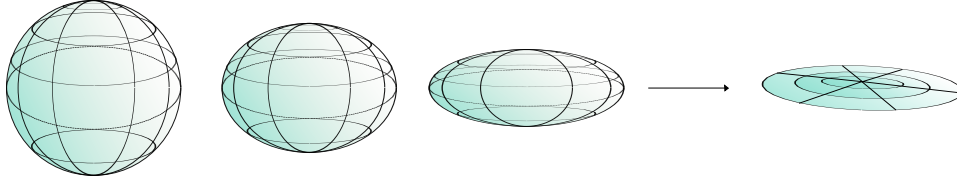


FIGURA 1. Sucesión de superficies convergente al disco doble con \mathcal{F} creciente.

que esta nueva superficie satisface $\mathcal{F}(M_{1/4}) > \mathcal{F}(M_{1/2})$. Así, podemos obtener una sucesión de superficies $\{M_{1/2^n}\}_{n=0}^{\infty}$, donde $M_1 = S^2$, de manera que \mathcal{F} es creciente sobre sus elementos. El *límite*, de esta sucesión es el disco doble plano.

Esto sugiere que los máximos de \mathcal{F} restringida a ciertas colecciones de superficies, ocurren como límites de superficies suaves. Cabe mencionar que los límites mismos no necesariamente son superficies suaves, como en el caso del disco doble. Como dato importante, mencionamos que estos límites de superficies suaves ocurren muy frecuentemente y forman parte de los llamados *espacios de Alexandrov* (ver por ejemplo, [3] para la definición precisa y una introducción al tema). Estos espacios han resultado ser extremadamente importantes en el estudio de la geometría riemanniana global.

Es entonces natural extender la conjetura de Alexandrov a un contexto no suave. Por ejemplo podemos pensar en superficies suaves por pedazos o espacios singulares más generales. También de esto se deriva que una de las formas de atacar esta conjetura es restringir la clase de superficies permitidas. Por ejemplo tomar solo superficies convexas en \mathbb{R}^n , superficies lineales por pedazos, rotacionalmente simétricas, etc.

Aún con este enfoque, uno de los obstáculos principales es que calcular el diámetro de una superficie dada suele ser muy difícil. En algunos casos ha sido posible dar estimados concretos (por ejemplo [17]).

A continuación ilustramos algunos resultados parciales y técnicas que se han utilizado para atacar la conjetura.

3.1. Tetraedros. Como primera aproximación al problema, podemos considerar objetos lineales por pedazos. Particularmente, la clase de tetraedros es muy manejable. En [12], Makai probó el siguiente teorema.

Teorema (Makai). *Para cualquier tetraedro $ABCD$, con la métrica intrínseca inducida de \mathbb{R}^3 ,*

$$\mathcal{F}(ABCD) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

La igualdad se satisface si y sólo si, $ABCD$ es regular, es decir, todos sus lados tienen la misma longitud.

Bosquejo de prueba ([12]). Como primer paso determinamos el diámetro de un tetraedro regular $ABCD$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\overline{AB} = 2$. Si O es el centro de la cara ABD , entonces $d(C, O) = 4\sqrt{3}/3$. Intuitivamente

estos son los puntos que pueden estar más alejados en el tetraedro. Para ver esto, tomamos el tetraedro $ABDC$ y lo colocamos sobre el plano complejo. Después rodamos el tetraedro sobre sus aristas de manera que se cubra todo el plano. Esto determina una teselación por triángulos equiláteros de lado 2. A los vértices de dicha teselación que fueron tocados por A, B, C y D los denotamos respectivamente por dichas letras. Si la posición inicial del tetraedro se elige con cuidado se obtiene que las coordenadas de los puntos marcados con A, B, C y D son

$$2n + (1 + i\sqrt{3})m$$

con n, m pares en las A , impares en las C , n impar, m par en las B y n par y m impar en las D .

Entonces, dados dos puntos P y Q en $ABCD$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que P está en la cara ABD y Q en la cara BDC . Al rodar el tetraedro al punto P le corresponde un punto P_0 en una cara ABD que fijamos de la teselación y a Q le corresponden puntos Q_i para cada cara BDC . Los puntos Q_i forman a su vez una teselación del plano por triángulos equiláteros de lado 4. De modo que si P_0 cae sobre un triángulo $Q_iQ_jQ_k$ se tiene que

$$d(P, Q) \leq \min\{\overline{P_0Q_i}, \overline{P_0Q_j}, \overline{P_0Q_k}\} \leq d(O, C) = 4\sqrt{3}/3.$$

Ahora consideramos un tetraedro arbitrario $ABCD$. Definimos $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$ y análogamente β, γ y δ . Desdoblamos las caras DAC, DCB y DBA a lo largo de las aristas AC, CB y BA respectivamente sobre el plano que contiene a la cara ABC . Así obtenemos los triángulos D_BAC, D_ACB y D_CBA .

Sea Q el centro del incírculo del triángulo $D_AD_BD_C$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el radio del incírculo es 1. Es fácil ver que Q debe estar en el triángulo ABC y por lo tanto $d(D, Q) = 1$.

Por otra parte, el área A_{ABCD} de $ABCD$ está dada por

$$A_{ABCD} = A_0 + \cos^2 \alpha_1 \tan \delta_A + \cos^2 \beta_1 \tan \delta_B + \cos^2 \gamma_1 \tan \delta_C,$$

donde A_0 es el área del triángulo $D_AD_BD_C$, $\delta_A = \angle D_CD_BA$, $\delta_B = \angle D_AD_CB$, $\delta_C = \angle D_BD_AC$, $\alpha_1 = \angle QD_CD_B$, $\beta_1 = \angle QD_AD_C$, $\gamma_1 = \angle QD_BD_A$. De modo que podemos considerar a A_{ABCD} como una función de δ_A, δ_B y δ_C (las demás variables dependen de A, B, C y quedan determinadas al determinar los vértices del tetraedro). Esta función está restringida al compacto determinado por las condiciones $-\alpha_1 \leq \delta_A \leq \pi/2$, $-\beta_1 \leq \delta_B \leq \pi/2$, $-\gamma_1 \leq \delta_C \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq \pi/2$, $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi/2$, $\delta_A + \delta_B + \delta_C + \max\{\delta_A, \delta_B, \delta_C\} \leq 0$. Ya que S es continua debe alcanzar un máximo con estas condiciones. Es posible ver que dicho máximo ocurre sobre la frontera del compacto y un análisis cuidadoso de cada caso da como resultado que $A_{ABCD} \leq 3\sqrt{3}/4$. \square

Es interesante notar que en esta subclase de superficies no se alcanza el valor de \mathcal{F} dado por el disco doble. Otra clase similar de superficies lineales por pedazos es la de los *paralelepípedos rectangulares*, considerada por Nikorov y Nikorova [13]. En ese caso, el paralelepípedo P que maximiza a \mathcal{F} es aquel cuyos lados miden 1,

1 y $\sqrt{2}$. Explícitamente, el máximo es

$$\mathcal{F}(P) = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6}.$$

3.2. Estimado de Calabi-Cao. En [5], Calabi y Cao consideraron el caso suave, imponiendo la condición de que las superficies en cuestión tengan curvatura no-negativa. En su trabajo obtuvieron el mejor estimado que se tenía para \mathcal{F} hasta 1992:

Teorema (Calabi, Cao). *Sea M una superficie riemanniana difeomorfa a \mathbb{S}^2 , con curvatura no-negativa. Entonces*

$$\mathcal{F}(M) \leq \frac{8}{\pi}.$$

Bosquejo de la demostración. Este resultado se basa en ciertos estimados de los eigenvalores del laplaciano. A continuación enunciamos el primero de éstos, debido a Hersch (cf. [10]), (ver también [18]).

Teorema (Hersch). *Sea (S, g) una superficie cerrada homeomorfa a \mathbb{S}^2 y sean $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 = \lambda_1(g) \leq \lambda_2 = \lambda_2(g) \leq \dots$ los eigenvalores del laplaciano. Entonces*

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \geq \frac{3}{8\pi} A(S, g).$$

La igualdad se obtiene si y sólo si g tiene curvatura seccional constante.

Del resultado anterior podemos concluir que

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{3A(S, g)} \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right)$$

y, en particular, que $\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{A(S, g)}$. Cabe mencionar que Yang y Yau obtuvieron un resultado análogo para superficies cerradas de género mayor. ([19]).

Por otra parte, Zhong y Yang obtuvieron una relación entre λ_1 y el diámetro de la superficie, a saber,

Teorema (Zhong, Yau). *Sea (M, g) una variedad riemanniana con curvatura de Ricci no-negativa. Entonces*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{\text{Diam}(M, g)^2}.$$

Combinando los resultados de Hersch y Zhong-Yau, obtenemos que

$$\frac{\pi^2}{\text{Diam}(M, g)^2} \leq \frac{8\pi}{A(S, g)}$$

de donde se sigue el resultado. \square

Un hecho interesante que mencionan Calabi y Cao, es que este estimado difiere del propuesto por Alexandrov (es decir, $\pi/2$) por un factor de 1.62. Asimismo, Yau demostró que esta cota es óptima para ciertos toros planos.

3.3. Estimado de Shioya. Recordamos la definición del *radio* de un espacio métrico (M, d) :

$$R(M) := \inf_{p \in M} \sup_{q \in M} d(p, q)$$

Notemos que $\text{Diam}(M)/2 \leq R(M) \leq \text{Diam}(M)$. El Teorema de comparación de Bishop, en particular implica que $A(M) \leq A_k(R(M))$. Este estimado es bueno en aquellos casos en los que $R(M)$ es significativamente menor a $\text{Diam}(M)$. El estimado dado en 2014 por Shioya es efectivo en aquellos casos en los que $R(M)$ es cercano a $\text{Diam}(M)$ [16]. Por simplicidad nos centraremos en el caso en el que las superficies en consideración tienen métricas de curvatura no-negativa.

Teorema (Shioya). *Sea M una superficie cerrada con curvatura seccional no-negativa. Entonces tenemos que*

$$\mathcal{F}(M) \leq \pi \left(1 - \frac{\chi(M)}{6} \rho^4 \right)$$

donde $\rho := R(M)/\text{Diam}(M)$ y $\chi(M)$ denota a la característica de Euler de M .

La prueba de el teorema anterior se basa en el siguiente resultado técnico (cf. [16, Proposición 3]). Convendremos en denotar $A := A(M, g)$, $R := R(M)$, $D = \text{Diam}(M)$ y $\chi := \chi(M)$.

Proposición. *Sea M una superficie cerrada con curvatura seccional $\geq k \geq 0$. Entonces*

$$A \leq \pi D^2 - \frac{2\pi\chi\tilde{A}_k(R)}{A_k(D)}$$

donde

$$\tilde{A}_k(r) := \int_0^r \int_0^t A_k(s) ds dt = \begin{cases} \pi r^4/12 & \text{si } k = 0 \\ \pi k^{-2}(kr^2 + 2 \cos(\sqrt{k}r) - 2) & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Demostración. Sea, para cada $p \in M$,

$$R_p := \sup_{q \in M} d(p, q),$$

donde d es la distancia inducida por la métrica riemanniana de M . Observamos que la función R_p es continua en la variable p . Denotemos por $B(p, r)$ a la bola de radio r con centro en p y por $\partial B(p, r)$ a su frontera. También denotamos por $\tau(p, r)$ a la suma de la integral de la curvatura geodésica de $\partial B(p, r)$ y sus ángulos exteriores en los puntos de corte de p en $\partial B(p, r)$. Notemos que τ está bien definida casi para todo $r \in (0, R_p)$.

Ahora, si $L(p, r)$ es la longitud de $\partial B(p, r)$, Fiala y Hartman demostraron que ([9, Teorema 6.1], ver también [15, Teorema 4.4.1]),

$$\frac{d}{dr} L(p, r) \leq \tau(p, r)$$

para casi todo $r \in (0, R_p)$. Sea K la curvatura seccional de M . Tomando en cuenta que la característica de Euler de un subconjunto propio de M es a lo más 1, el Teorema de Gauss-Bonnet implica que para casi todo $r \in (0, R_p)$,

$$\tau(p, r) \leq 2\pi - \int_{B(p,r)} K(q) dq.$$

En la fórmula anterior, dq denota a la forma de área respecto a la variable q . Notemos ahora que $\int_{B(p,r)} K(q) dq$ es continua respecto a $(p, r) \in M \times [0, \infty)$, de modo que

$$A = \int_0^{R_p} L(p, t) dt \leq \iint_{0 \leq s \leq t \leq R_p} \left(2\pi - \int_{B(p,s)} K(q) dq \right) ds dt$$

Usando que $R_p \leq D$ e integrando ambos lados de la desigualdad anterior respecto a p , tenemos que

$$A^2 \leq \iiint_{\substack{0 \leq s \leq t \leq D \\ p \in M}} 2\pi ds dt dp - I = \pi D^2 A - I,$$

donde

$$I := \iiint_{\substack{0 \leq s \leq t \leq R_p \\ d(p,q) < s}} K(q) dq ds dt dp.$$

Acotaremos I por debajo. Denotemos por $A(q, s)$ al área de la bola $B(q, s)$. Como $K(q) \geq 0$ y $R_p \geq R$, por el Teorema de comparación de Bishop-Gromov se tiene que

$$\begin{aligned} I &\geq \iiint_{\substack{0 \leq s \leq t \leq R \\ d(p,q) < s}} K(q) dq ds dt dp = \iiint_{\substack{0 \leq s \leq t \leq R \\ q \in M}} K(q) A(q, s) dq ds dt \\ &\geq \frac{A}{A_k(D)} \iiint_{\substack{0 \leq s \leq t \leq R \\ q \in M}} K(q) A_k(s) dq ds dt \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Gauss-Bonnet, obtenemos

$$I \geq \frac{2\pi\chi A}{A_k(D)} \iint_{0 \leq s \leq t \leq R} A_k(s) ds dt = \frac{2\pi\chi \tilde{A}_k(R)}{A_k(D)} A.$$

Al combinar esto con el estimado anterior para A^2 obtenemos que

$$A^2 \leq \pi D^2 A - \frac{2\pi\chi \tilde{A}_k(R)}{A_k(D)} A$$

de donde se sigue el resultado. \square

En el mismo trabajo, Shioya demuestra el siguiente estimado general (es decir, para cualquier cota inferior de curvatura), sobre el cual haremos algunos comentarios (ver [16, Teorema 1] para su demostración).

Teorema. *Sea M una superficie cerrada con curvatura seccional $\geq \kappa$ y $k := \kappa \text{Diam}(M)^2$. Definimos*

$$\begin{aligned} w(k) &:= \frac{A_k(1)}{\pi} \\ \lambda_{\chi(M)}(k) &:= 2\chi(M) - kw(k) \\ \alpha_{\chi(M)}(k) &:= \begin{cases} w(k) + \frac{k\lambda_{\chi(M)}(k)}{360} & \text{if } k \geq 0 \\ w(k)^2 & \text{if } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, si $\lambda_{\chi(M)}(k) > 0$,

$$\mathcal{F}(M, g) \leq A_k \left(\sqrt{\frac{-6w(k) + 6\sqrt{w(k)^2 + \frac{\lambda_{\chi(M)}(k)\alpha_{\chi(M)}(k)}{3}}}{\lambda_{\chi(M)}(k)}} \right)$$

La cantidad λ puede pensarse como una medida de qué tanto la superficie se aleja de ser una forma espacial, ya que Shioya demuestra que $\lambda \geq 0$ y que $\lambda = 0$ si y sólo si M tiene curvatura constante no-negativa, y para este caso, se puede estimar manualmente el valor de \mathcal{F} . Por otra parte, si tomamos el límite de los estimados dados por el teorema cuando $\lambda(k) \rightarrow 0^+$, se obtiene que $\mathcal{F} \leq A_k(1)$ para $\lambda = 0$. Cabe mencionar que este estimado es óptimo para el caso de curvatura positiva constante.

Una conclusión importante del teorema anterior es que, haciendo $\kappa = 0$, se obtienen estimados para S^2 y $\mathbb{R}P^2$. En el caso de la esfera, estos estimados son mejores que los de Calabi-Cao.

3.4. Superficies esféricamente simétricas. En el 2014, Freitas y Krejčířik consideraron una generalización de la conjetura de Alexandrov a dimensiones mayores que 2 y la demostraron para cierta clase de variedades “esféricamente simétricas”. A continuación bosquejaremos su argumento.

Denotemos por Σ a la esfera S^d equipada con una métrica riemanniana *esféricamente simétrica* (cf. [8]), es decir, una métrica riemanniana que satisface la siguiente condición:

Existe un punto $p \in \Sigma$ con coordenadas esféricas geodésicas alrededor de p

$$dl^2 = ds^2 + f_p(s)^2 d\theta^2, \quad (s, \theta) \in U_p := (0, D_p) \times S^{d-1},$$

donde $d\theta^2$ es la métrica usual en S^{d-1} , D_p es un número positivo y f_p es una función positiva de clase C^∞ sobre $(0, D_p)$ que satisface la ecuación de Jacobi

$$\begin{cases} f_p''(s) + k_p(s)f_p(s) = 0 & \text{para todo } s \in (0, D_p) \\ f_p(0) = 0 \\ f_p'(0) = 1. \end{cases}$$

Aquí, $k_p(s)$ es la *curvatura radial* de Σ en q para cualquier q tal que $d(p, q) = s$. Por curvatura radial, se entiende la restricción de la curvatura seccional a los planos que contienen al campo vectorial W tal que para cada $q \in \Sigma \setminus (\{p\} \cup \mathcal{C}_p)$ (el conjunto \mathcal{C}_p es el conjunto de puntos de corte), $W(q)$ es el vector unitario tangente a la única geodésica que une a p con q .

La condición de simetría esférica implica que las geodésicas que emanan de p tienen el mismo comportamiento en todas las direcciones, de modo que la función exponencial sólo depende de la variable radial. Por lo tanto, mientras la exponencial sea un difeomorfismo, la frontera de su imagen hasta tiempo t es una $(d-1)$ -esfera. Por otra parte, en un punto en el que la exponencial deja de ser un difeomorfismo, lo mismo pasa para los puntos que estén a la misma distancia de p , así que \mathcal{C}_p es una $(d-1)$ -esfera o un punto. Como la cerradura de $\Sigma \setminus \mathcal{C}_p$ es una superficie cerrada, concluimos que \mathcal{C}_p consta de un solo punto:

$$p^* := \exp(\{D_p\} \times S^{d-1}) \in \Sigma.$$

Ya que Σ es difeomorfa a una esfera, el análisis previo indica que podemos identificar a p y p^* con los polos de dicha esfera. Esto implica que Σ también es esféricamente simétrica vista desde p^* .

Por simplicidad supondremos que la curvatura radial de Σ en p y p^* es no-negativa. Entonces se sigue de la ecuación de Jacobi que para todo $s \in (0, D_p)$

$$f_p(s) \leq s \quad \text{y} \quad f_{p^*}(s) \leq s.$$

Cabe mencionar que estas cotas son válidas bajo hipótesis más generales y que la suposición sobre la curvatura radial no es necesaria (cf. [8, Apéndice B]).

Aplicando estos estimados al volumen de Σ se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Sigma) &= \text{Vol}_{d-1}(S^{d-1}) \int_0^{D_p} f_p^{d-1}(s) ds = \text{Vol}_{d-1}(S^{d-1}) \int_0^{D_p} f_{p^*}^{d-1}(s) ds \\ &= \text{Vol}_{d-1}(S^{d-1}) \int_0^{D_p/2} f_p^{d-1}(s) ds + \text{Vol}_{d-1}(S^{d-1}) \int_0^{D_p/2} f_{p^*}^{d-1}(s) ds \\ &\leq \frac{\text{Vol}_{d-1}(S^{d-1})}{2^{d-1}d} D_p^d = \frac{\text{Vol}_d(B^d)}{2^{d-1}} D_p^d, \end{aligned}$$

donde Vol_l denota al volumen l -dimensional.

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq \min\{d(a, p) + d(p, b), d(a, p^*) + d(p^*, b)\} \\ &\leq \frac{1}{2} (d(a, p) + d(p, b) + d(a, p^*) + d(p^*, b)) \\ &= d(p, p^*) \end{aligned}$$

lo cual se sigue de la desigualdad del triángulo y de la simetría esférica, ya que esta suposición implica que

$$d(a, p) + d(a, p^*) = d(p, p^*) = d(b, p) + d(b, p^*)$$

Así, tenemos que como consecuencia de la simetría esférica de Σ , tenemos que $\text{Diam}(\Sigma) = d(p, p^*)$. De este modo se obtiene el siguiente Teorema:

Teorema (Freitas, Krejčířík). *Sea Σ una variedad d -dimensional cerrada y esféricamente simétrica difeomorfa a S^d y encajada isométricamente en \mathbb{R}^{d+1} . Entonces*

$$\frac{\text{Vol}(\Sigma)}{\text{Diam}(M)^d} \leq \frac{\text{Vol}_d(B^d)}{2^{d-1}}.$$

La igualdad se obtiene al tomar a Σ como el doble de una bola de diámetro D .

REFERENCIAS

1. A. D. Alexandrov, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
2. A. D. Alexandrov, *Alexandrov selected works Part II Intrinsic geometry of convex surfaces* Editado por S. S. Kutateladze. Traducido del Ruso por S. Vakhrameyev. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. xiv+426 pp.
3. D. Burago, Y. Burago y S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xiv+415 pp.
4. Y. Burago y V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer Science & Business Media, 285 (2013).
5. E. Calabi y J. G. Cao, *Simple closed geodesics on convex surfaces*, J. Differential Geom. 36 (1992), no. 3, 517–549.
6. M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. viii+503 pp.
7. L. C. Evans y R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions* Edición revisada. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. xiv+299 pp.
8. P. Freitas y D. Krejčířík, *Alexandrov's isodiametric conjecture and the cut locus of a surface*, Tohoku Math. J. (2) 67 (2015), no. 3, 405–417.
9. P. Hartman, *Geodesic parallel coordinates in the large* Amer. J. Math. 86 1964 705–727.
10. J. Hersch, *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 270 (1970), A1645–A1648.
11. D. Hug y R. Schneider, *Asymptotic shapes of large cells in random tessellations*, Geom. Funct. Anal. 17 (2007), no. 1, 156–191.
12. Makai, *On the geodesic diameter of convex surfaces*, Period. Math. Hungar. 4 (1973), 157–161.
13. Y. G. Nikonorov y Y. V. Nikonorova, *The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped*, Discrete Comput. Geom. 40 (2008), 504–527.
14. P. Petersen, *Riemannian geometry*, Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, Cham, 2016. xviii+499 pp.
15. K. Shiohama, T. Shioya y M. Tanaka, *The geometry of total curvature on complete open surfaces* Cambridge Tracts in Mathematics, 159. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. x+284 pp.
16. T. Shioya, *Estimate of isodiametric constant for closed surfaces*, Geom. Dedicata 174 (2015), 279–285.
17. T. Shioya, *Diameter and area estimates for S^2 and P^2 with non-negatively curved metrics*, Progress in differential geometry, Adv. Stud. Pure Math., vol. 22, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, pp. 309–319.
18. S. Tanno, *The first eigenvalue of the Laplacian on spheres*, Tohoku Math. J. (2) 31 (1979), no. 2, 179–185.
19. P. C. Yang y S. T. Yau, *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 7 (1980), no. 1, 55–63.
20. S. T. Yau, "Problem section" en *Seminar of Differential Geometry* (Ann. of Math. Studies 102), Princeton Univ. Press, Princeton (1982), pp. 669–706.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
SANTA BARBARA, CA
93106
E-mail address: zimbron@ucsb.edu