Abstraction & Application **28** (2020) 1 $-$ XX UADY

Funciones armónicas y curvatura de Ricci acotada por debajo

[a]Jesús Núñez-Zimbrón

[a]Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, México

[a]zimbron@matmor.unam.mx,

Resumen

En este trabajo expositorio bosquejamos brevemente un resultado reciente del autor en conjunto con Guido De Philippis en el que mostramos que el gradiente de cualquier función armónica se anula en una clase de puntos singulares de ciertos espacios que admiten "curvatura de Ricci acotada por debajo y dimensión acotada por arriba". Este resultado tiene consecuencias sobre la continuidad de los gradientes de funciones armónicas no triviales así como sobre el incumplimiento de ciertas desigualdades funcionales en variedades riemannianas con curvatura de Ricci acotada inferiormente.

Abstract

In this expository article we briefly survey a recent result of the author joint with Guido De Philippis in which we show that the gradient of any harmonic function vanishes at a class of singular points of certain spaces with "Ricci curvautre bounded below and dimension bounded above". This result has consequences about the continuity of the gradient of non-trivial harmonic functions and the failure of certain functional inequalities on Riemannian manifolds of Ricci curvature bounded below.

Keywords and phrases : espacios RCD, funciones armónicas. 2010 *Mathematics Subject Classification*: 53C23

1. Introducción

En cierto sentido, los objetos de estudio naturales de la geometría son los espacios métricos. Sin embargo, un espacio métrico genérico puede llegar a ser extremadamente salvaje. Es por esta razón que es tan atractivo estudiar objetos que gozan de una gran regularidad, como las variedades riemannianas. No sólo tienen una topología extremadamente regular a nivel local, sino que traen consigo una maquinaria extremadamente poderosa: la del cálculo diferencial.

En años recientes el estudio de espacios métricos o espacios métricos de medida con alguna condición de curvatura acotada ha adquirido una importancia muy grande. La condición de curvatura acotada actúa en cierto sentido como una condición que regulariza la topología y geometría de los espacios en cuestión. Por una parte, este tipo de espacios extienden el universo en el que es posible estudiar todos los conceptos de la geometría riemanniana a espacios mucho más generales que las variedades riemannianas y, por otra parte, poco a poco se ha ido encontrando aplicaciones de estos espacios que permiten entender mucho mejor la geometría y topología de las variedades suaves.

Fecha de recepción: XXXX . Fecha de aceptación: XXXX.

Los espacios de Alexandrov son espacios métricos que admiten una cota inferior de curvatura seccional. Esta noción no está basada en el tensor clásico de curvatura y para darle sentido sólo se requiere hablar de distancias entre colecciones de puntos. La definición se basa en el famoso teorema de comparación de distancias de Toponogov (ver, por ejemplo el Teorema 12.2.2 [35]). Fueron estudiados formalmente por primera vez en [8] y han encontrado aplicaciones fantásticas; por ejemplo, jugaron un papel importante en la prueba de G. Perelman de la conjetura de geometrización de W. Thurston (ver [32], [33], [34]). Una de las propiedades clave de la clase de espacios de Alexandrov es que es cerrada bajo convergencia de Gromov-Hausdorff (ver por ejemplo [7] para las nociones básicas de esta noción de convergencia). Esto permite utilizar argumentos de perturbación, compacidad y obtener versiones cuantitativas de resultados clásicos casi inmediatamente.

Cuando se habla de curvatura de Ricci, el concepto correspondiente es el de espacio RCD. De manera intuitiva, un espacio RCD es un espacio métrico de medida que tiene curvatura de Ricci acotada por debajo y dimensión acotada por arriba. Estos espacios generalizan a los espacios de Alexandrov (y *a fortiori* a las variedades riemannianas de curvatura de Ricci acotada inferiormente). Así como los espacios de Alexandrov, esta clase de espacios es cerrada bajo convergencia de Gromov-Hausdorff, e incluso bajo la noción más general de convergencia Gromov-Hausdorff mesurada (ver [22]). Más aún, estos espacios traen consigo una teoría robusta de análisis funcional que sirve como sustituto del cálculo diferencial usual que uno hace sobre las variedades riemannianas.

En este artículo expositorio hablaremos de una aplicación de estas teorías en la que se analizó la regularidad de las funciones armónicas. Consideremos una variedad riemanniana M. Es bien sabido que las funciones armónicas definidas en un abierto de M son suaves, es decir, de clase C^∞. En este contexto se sabe también que bajo la hipótesis de que M tenga curvatura (ya sea seccional o de Ricci) acotada por debajo, es posible obtener estimados cuantitativos de la continuidad Lipschitz de las funciones armónicas (recordamos este estimado en la siguiente sección). Dado que la continuidad Lipschitz no está muy alejada de C^1, una pregunta natural es si es posible dar estimados cuantitativos de la norma C^1 de una función armónica. Esta pregunta fue formulada por N. Gigli en [17]. En [13], G. De Philippis y el autor demostraron que esto no es posible, es decir, a lo largo de ciertas sucesiones de variedades con curvatura de Ricci acotada por debajo, la norma C^1 de funciones armónicas se va a infinito. Tratar esta pregunta con técnicas clásicas es extremadamente complicado y no se conoce una prueba de este estilo. Sin embargo, al incorporar la teoría de espacios Alexandrov y RCD, la prueba se vuelve sencilla y se basa en un simple argumento perturbativo.

A lo largo de las siguientes secciones expondremos este resultado de manera breve y sin detenernos en los aspectos técnicos. El material de este manuscrito está basado en la plática que el autor impartió en el XVI Coloquio de Geometría de la Universidad Autónoma de Yucatán. El autor desea agradecer a los organizadores por el evento y por la invitación a someter este trabajo.

2. Regularidad de funciones armónicas

Comenzaremos por recordar la definición y algunas propiedades básicas de las funciones armónicas con el objetivo de recordar el siguiente resultado: toda función armónica en una variedad riemanniana es localmente Lipschitz.

Sea $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana completa, conexa de dimensión n. Denotamos la conexión de Levi-Civita por ∇. Recordemos que, dados campos vectoriales suaves U, V, W tangentes a M, el tensor de curvatura de Riemann se define como

$$R(V,W)U := \nabla_V \nabla_W U - \nabla_W \nabla_V U - \nabla_{[V,W]} U.$$

A partir de este tensor se define la curvatura seccional del 2-plano $\pi \subset TM$ generado por dos campos V y W como

$$\mathrm{Sec}(\pi) = \frac{\langle R(V,W)W, V\rangle}{|V|^2\,|W|^2 - \langle V, W\rangle^2}.$$

Una vez que se tiene definida la curvatura seccional, se define la curvatura de Ricci de M de la siguiente forma:

$$\mathrm{Ric}(V,W) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i,V)W, E_i\rangle$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^n$ es cualquier marco ortonormal.

Recordemos que, dada una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ se define su gradiente ∇f como el único campo vectorial tangente a M que satisface la relación

$$V(f) = \langle \nabla f, V\rangle$$

para todo campo vectorial tangente V. A partir de este objeto se puede definir el Hessiano de f como

$$\mathrm{Hess}(f)(V,W) := \langle \nabla_V \nabla f, W\rangle\,,$$

y de este modo, se define también el Laplaciano de f como la traza del Hessiano (o dicho de otro modo, la divergencia del gradiente de f), es decir,

$$\Delta f := \mathrm{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(f)(E_i,E_i)$$

para cualquier marco ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$.

La clase de funciones armónicas es una de las familias de funciones más importantes dentro del análisis y la geometría. Existen diversas maneras de definir el concepto de función armónica dependiendo del contexto. Una función de clase al menos C^2 sobre una variedad Riemanniana M se llama *armónica* si es solución de la *ecuación de Laplace*

$$\Delta f = 0$$

Por otra parte, una manera de definir una función armónica cuando se tiene baja regularidad (es suficiente por ejemplo L^2-integrable), es en el sentido de distribuciones, es decir, f es *débilmente armónica* si para toda función $g : M \to \mathbb{R}$ suave con soporte compacto se tiene que

$$\int f \Delta g \, \mathrm{d}x = -\int \langle \nabla g, \nabla f\rangle \, \mathrm{d}x = 0.$$

Un resultado sorprendente que es testigo de la gran regularidad de la que gozan las funciones armónicas es que, una función es débilmente armónica si y sólo si es armónica. Más aún, se sigue de la teoría estándar de regularidad de operadores elípticos que toda función armónica es suave en el interior de su dominio de definición (ver por ejemplo la sección correspondiente en [15]).

Las funciones armónicas suelen codificar ciertas propiedades geométricas de las variedades riemannianas; Por ejemplo, es posible identificar si una variedad riemanniana admite una cota inferior no-negativa en la curvatura de Ricci examinando sus funciones armónicas, como lo demostró S. T. Yau en el siguiente resultado (ver el Corolario 1 en [42]).

Teorema 2.1 (Yau)**.** Sea M una variedad riemanniana completa con curvatura de Ricci no-negativa. Entonces toda función armónica positiva es constante.

Gracias a sus propiedades y regularidad, las funciones armónicas suelen ser extremadamente útiles en la solución de problemas de naturaleza geométrica. Recordemos, por ejemplo, el famoso teorema de escición de rectas de J. Cheeger y D. Gromoll (ver Teorema 2 en [10]), originalmente probado por S. Cohn-Vossen para superficies, [11] y por V. Toponogov en el caso de variedades de curvatura seccional no-negativa, [40].

Teorema 2.2 (Cheeger-Gromoll)**.** Sea M una variedad riemanniana completa de curvatura de Ricci no-negativa. Entonces M es isométrica a un producto de la forma $N \times \mathbb{R}^k$, donde N tiene curvatura de Ricci no-negativa y no contiene líneas y $\mathbb{R}^k$ se considera con la métrica plana usual.

Uno de los puntos clave en la demostración es precisamente la existencia de una función armónica sobre la variedad; las trayectorias del flujo gradiente de esta función parten al espacio adecuadamente.

Es entonces natural estudiar las propiedades analíticas y geométricas de las funciones armónicas cuando se trata de entender la geometría de variedades riemannianas, en particular de aquellas que gozan de alguna cota de curvatura. En esta sección recordaremos brevemente un estimado muy sencillo que permite concluir la continuidad Lipschitz de una función armónica bajo la hipótesis de que la variedad en cuestión tenga curvatura de Ricci acotada por debajo. Para esto, recordemos la identidad de Bochner

Teorema 2.3 (Identidad de Bochner)**.** Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave sobre una variedad riemanniana $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Entonces,

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\nabla f\right|^2 = \left|\mathrm{Hess}(f)\right|^2 + \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f). \tag{2.1}$$

Utilizaremos esta identidad en el caso en el que f sea una función armónica y la variedad en cuestión tenga una cota inferior en la curvatura de Ricci, digamos $-(n-1)K$. Incorporando la cota en la curvatura de Ricci y el hecho de que f es armónica tenemos a partir de la identidad de Bochner que

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\nabla f\right|^2 \geq \left|\mathrm{Hess}(f)\right|^2 - (n-1)K\left|\nabla f\right|^2$$

Dado que $\left|\mathrm{Hess}(f)\right|^2 \geq 0$ podemos omitir este término para obtener:

$$\frac{1}{2}\Delta\left|\nabla f\right|^2 \geq -(n-1)K\left|\nabla f\right|^2 \tag{2.2}$$

Utilizaremos el estimado que acabamos de obtener en conjunto con otra de las propiedades principales de las funciones armónicas, la llamada *desigualdad del valor medio*[1] (ver, por ejemplo la Sección 7 en [28] para la demostración):

Teorema 2.4. Sea $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una variedad riemanniana con $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$, $x \in M$ y $R_0 > 0$. Supongamos que $g : M \to \mathbb{R}$ es una función suave y no-negativa que satisface

$$\Delta g \geq -Ag$$

para alguna constante $A \in \mathbb{R}$ en $B(x, 2R_0)$. Entonces existe una constante $C(A, n, K) > 0$ tal que

$$g^2(x) \leq \frac{C(A,n,K)}{\mathrm{vol}\left(B(x,R_0)\right)}\int_{B(x,R_0)} g^2.$$

para todo $x \in B(x, R_0)$.

Entonces basta notar que si tenemos una función armónica en una bola en M, digamos en $B(x, 2R_0)$, se tiene que

$$\sup_{B(x,R_0)}\left|\nabla f\right|^2 \leq \frac{C(n,K)}{\mathrm{vol}\left(B(x,R_0)\right)}\int_{B(x,2R_0)}\left|\nabla f\right|^2.$$

Un argumento sencillo utilizando el teorema de comparación de volumen de Bishop-Gromov (ver Sección 2 en [28]) nos da que

$$\sup_{B(x,R_0)}\left|\nabla f\right|^2 \leq \frac{C(n,K)}{\mathrm{vol}\left(B(x,2R_0)\right)}\int_{B(x,2R_0)}\left|\nabla f\right|^2. \tag{2.3}$$

Observemos que el lado derecho de la desigualdad anterior es finito gracias a que f es débilmente armónica. Esto dice que f es Lipschitz en la bola de radio R_0 con centro en x.

Como se mencionó en la Introducción, esto lleva a una pregunta natural: Ya que la propiedad de ser Lipschitz no está muy alejada de ser C^1, ¿es posible obtener un control similar al dado por la desigualdad (2.3) para la norma C^1 de una función armónica? Esta pregunta fue planteada por N. Gigli (ver [17]). En el trabajo [13] en conjunto con G. De Philippis que exponemos aquí, demostramos que esto no es posible.

[1] De hecho, esta desigualdad es válida para la clase, más general, de funciones subarmónicas, ver [28]

3. Espacios de curvatura acotada inferiormente

En esta sección haremos un breve resumen de las propiedades y elementos principales de las teorías de espacios de Alexandrov y espacios RCD. El lector puede consultar las referencias estandar [7] y [8] y los trabajos recientes en español [4], [5], [6] en el caso de los espacios de Alexandrov para una introducción. En cuanto a la teoría de espacios RCD, recomendamos al lector consultar [24] y [23].

Los espacios de Alexandrov forman parte de una familia de espacios métricos (X, d) conocidos como *espacios de longitud*, que están definidos por la propiedad de que para cada par de puntos $x, y \in X$, la distancia entre ellos se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$d(x, y) = \operatorname{ínf} \{L(\gamma) \mid \gamma_a = x,\, \gamma_b = y\}.$$

Aquí, el ínfimo se toma respecto a todas las curvas continuas $\gamma\colon [a, b] \to X$, con $a \leq b$ y $L(\gamma)$ denota a la *longitud* de la curva γ. Recordemos que la noción de longitud de una curva continua se define a través de "aproximación por segmentos", es decir:

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} d\left(\gamma_{t_i}, \gamma_{t_{i+1}}\right) \right\},$$

donde el supremo se toma respecto a todas las particiones finitas del intervalo de definición de la curva $[a, b]$,

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b.$$

Uno de los objetos centrales en la teoría de espacios de longitud es el de *geodésica*. Recordemos que una geodésica es una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que existe $C \geq 0$ con $d(\gamma_s, \gamma_t) = C|s - t|$ para todo $s, t \in [0, 1]$. Usualmente en el estudio de los espacios de longitud se suele requerir que todos los espacios sean completos y localmente compactos ya que esto garantiza la existencia de geodésicas que realizan la distancia entre cada par de puntos, es decir, cuya longitud es exactamente la distancia entre sus extremos.

Otros objetos de gran prominencia en la teoría de los espacios de curvatura acotada por debajo son los llamados *espacios modelo*: Para cada $k \in \mathbb{R}$, definimos el *espacio modelo* M_k^2 *de curvatura constante* k como la única (salvo isometría) superficie completa, simplemente conexa de curvatura seccional constante k. Los espacios modelo son el elemento central en la definición de un espacio de Alexandrov.

Para definir el concepto de espacio de Alexandrov recordemos la noción de triángulo geodésico. Un *triángulo geodésico* (término que abreviaremos simplemente como "triángulo") $\triangle pqr$ es una colección de puntos $p, q, r \in X$ así como de tres geodésicas minimizantes que los conectan dos a dos. Para cada triángulo $\triangle pqr$ en X se dice que un triángulo $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ en M_k^2 es un *triángulo de comparación para* $\triangle pqr$ si

$$d(p, q) = d_{M_k^2}(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad d(q, r) = d_{M_k^2}(q, r) \quad \text{y} \quad d(r, p) = d_{M_k^2}(\tilde{r}, \tilde{p}).$$

Definición 3.1. Un espacio de longitud (X, d) tiene *curvatura acotada por debajo por* $k \in \mathbb{R}$ (lo cual denotamos por $\operatorname{curv}(X, d) \geq k$ o $\operatorname{curv}(X) \geq k$) si cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U \subset X$ tal que para todo triángulo $\triangle pqr$, cuyos lados son denotados por γ_{pq}, γ_{qr} y γ_{rp} y todo triángulo de comparación $\triangle \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ con lados correspondientes $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{q}}$, $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}\tilde{r}}$ y $\tilde{\gamma}_{\tilde{r}\tilde{p}}$ en M_k^2 se satisface la *propiedad* T_k, esto es,

$$d(r, s) \geq d_{M_k^2}(\tilde{r}, \tilde{s}) \text{ para todo } s \in \gamma_{pq} \text{ y } \tilde{s} \in \tilde{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{q}} \text{ tal que } d(p, s) = d_{M_k^2}(\tilde{p}, \tilde{s}).$$

Estamos ya en posición de enunciar la definición de espacio de Alexandrov.

Definición 3.2. Un *espacio de Alexandrov*[2] es un espacio de longitud (X, d) completo y localmente compacto con $\operatorname{curv}(X) \geq k$ para algún $k \in \mathbb{R}$.

[2] No está de más mencionar que el término "Espacio de Alexandrov" es usado por algunos autores para referirse tanto a espacios de curvatura acotada por debajo, como a aquellos de curvatura acotada por arriba. En este artículo reservamos este término sólo para los primeros.

Cabe mencionar que la propiedad T_k que se usó en la definición 3.2 es una propiedad local. Sin embargo, como es natural de suponer, los espacios de Alexandrov satisfacen una propiedad "local a global", es decir, una vez que se satisface la propiedad T_k en todos los abiertos de una cubierta del espacio, se satisface para cualquier abierto del mismo (véase el teorema 10.3.1 en [7]).

Ahora hablaremos de manera resumida sobre los aspectos básicos de las cotas inferiores en la curvatura de Ricci para espacios métricos de medida. La primera noción de "espacio métrico de medida con curvatura de Ricci acotada por debajo por $k \in \mathbb{R}$ y dimensión acotada por arriba por $N \in (0, \infty)$" fue descubierta por J. Lott, K. T. Sturm y C. Villani en [29], [38] y [39]). En estos trabajos se introdujo la clase de espacios $\mathsf{CD}(K, N)$. Dado que la definición involucra una cota de curvatura y otra de dimensión aquí CD es una abreviación de "curvatura-dimensión". Posteriormente, Ohta descubrió que las variedades de Finsler compactas son espacios $\mathsf{CD}(K, N)$. N. Gigli propuso en [18], refinar la definición de la condición CD para aislar a aquellos espacios que tienen estructuras más parecidas a las variedades riemannianas, resultando en la clase de espacios $\mathsf{RCD}(K, N)$.

La definición que daremos está basada en el siguiente resultado que caracteriza cuándo una variedad riemanniana tiene curvatura de Ricci acotada por debajo por k en términos de la llamada *desigualdad de Bochner*:

Teorema 3.3. Sea $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana y $K \in \mathbb{R}$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathrm{Ric} \geq K$

(ii) Para toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad de Bochner (la cual denotamos por $B(K, n)$):
$$\frac{1}{2}\Delta \left|\nabla u\right|^2 \geq \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + K \left|\nabla u\right|^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}$$

Es posible dar sentido a todos los objetos que aparecen en la desigualdad de Bochner $B(K, n)$ en un contexto mucho más general que el de las variedades riemannianas: el de los *espacios métricos de medida* con algunas condiciones naturales.

En adelante, (X, d, m) denotará a un espacio métrico de medida en el cual (X, d) es un espacio métrico completo y separable y m es una medida de Borel que da masa finita a conjuntos acotados. Veremos primero cómo es posible definir "la norma del gradiente de una función" en este contexto. La definición está inspirada por la siguiente proposición, que da una caracterización variacional de $|\nabla f|$ para funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4. Sea f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ y G una funcíón continua y no-negativa. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.

(i) $G \geq |\nabla f|$

(ii) $|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \leq \int_0^1 G(\gamma_t)\, |\gamma_t'|\, \mathrm{d}t$ para toda curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1.

Aunque en general no tiene sentido hablar de la clase de curvas C^1 en un espacio métrico de medida, hay una clase que sirve de sustituto natural: la clase de curvas absolutamente continuas. Diremos que una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ continua es *absolutamente continua* si existe $f \in L^1([0, 1])$ tal que

$$d(\gamma_t, \gamma_s) \leq \int_s^t f(r)\, \mathrm{d}r \qquad \text{para todo} \quad t, s \in [0, 1], \quad s < t.$$

Es posible demostrar (ver [18]) que si γ es absolutamente continua, entonces su *rapidez métrica*, es decir

$$|\gamma_t'| := \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|}$$

está bien definida. Más aún, $|\gamma_t'|$ satisface el rol de f en la definición de curva absolutamente continua. Una vez que se tiene bien definida la rapidez métrica de una curva, es inmediato notar que para dar sentido al inciso (ii) de la proposición anterior no es necesario que el espacio tenga estructura de variedad. Así se tiene la siguiente definición originalmente propuesta por J. Heinonen y P. Koskela (ver [25]).

Definición 3.5. Sea (X, d, m) un espacio métrico de medida. Una función Borel $G : X \to \mathbb{R}$ no-negativa es un *gradiente superior* para $f : X \to \mathbb{R}$ si para toda curva γ absolutamente continua se satisface

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \leq \int_0^1 G(\gamma_t)\,|\gamma_t'|\,\mathrm{d}t$$

Intuitivamente uno desearía tomar la mínima función G que satisface la desigualdad anterior para recuperar una noción de "la norma del gradiente de f". Desafortunadamente, esta definición es muy sensible a cambios pequeños en las funciones involucradas. Considere el lector el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.6. Consideremos el espacio métrico de medida dado por $\mathbb{R}$ equipado con la distancia usual $|\cdot - \cdot|$ y la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^1$. En el papel de f consideraremos a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es sencillo ver, para cada $\varepsilon > 0$, la función G_ε dada por

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & 0 < |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

es un gradiente superior de f. Al tomar el límite cuando ε tiende a 0, se tiene que $G_\varepsilon \to 0$. Sin embargo, la función constante 0 no es un gradiente superior de f.

El ejemplo anterior motiva la siguiente relajación de la definición de gradiente superior, originalmente propuesta por N. Gigli[3].

Definición 3.7. Una función $G \in L^2(m)$ con $G \geq 0$ es un *gradiente superior débil* de $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \leq \int_0^1 G(\gamma_t)\,|\gamma_t'|\,\mathrm{d}t$$

para *"casi toda curva absolutamente continua γ"*. Más precisamente si

$$\int |f(\gamma_1) - f(\gamma_0)|\,\mathrm{d}\pi(\gamma) \leq \int \int_0^1 G(\gamma_t)\,|\gamma_t'|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\pi(\gamma)$$

para toda medida $\pi \in \mathcal{P}(C([0,1]; X))$ tal que

(i) $\int_0^1 \int |\gamma_t'|\,\mathrm{d}\pi(\gamma)\,\mathrm{d}t < \infty$ y,

(ii) existe una constante $C > 0$ tal que $(e_t)_\# \pi \leq Cm$ para todo $t \in [0,1]$, donde e_t es la *función evaluación* usual.

A las medidas π de la definición anterior se les llama *planes de prueba*. Las condiciones que se requieren son de caracter técnico y ayudan a desarrollar la teoría. En cierto sentido, las funciones f que tienen gradientes superiores débiles están definidas en dualidad con los planes de prueba. A la clase de funciones que admiten gradientes superiores débiles le llamamos *clase de Sobolev* y la denotamos por $S^2(X, d, m)$.

De esta manera se evitan las complicaciones del Ejemplo 3.6. Se puede demostrar que el conjunto

$$\left\{G \in L^2(m) \mid G \geq 0,\ G \text{ es gradiente superior débil de } f\right\}$$

[3] Es importante recalcar que definiciones, a posteriori equivalentes, fueron acuñadas por J. Cheeger y N. Shanmmugalingam, ver [9] y [37].

es cerrado y convexo de $L^2(m)$. Dado que $L^2(m)$ es un espacio de Hilbert, esto implica que siempre existe $\min G$ en la norma L^2. De esta manera se recupera una noción de la norma del gradiente de f sin necesidad de definir el operador gradiente. Así definimos $|\nabla f|$ como el gradiente superior débil mínimo de f. No está de más mencionar que esto es consistente con el caso en el que $(X, d, m) = (\mathbb{R}^n, |\cdot - \cdot|, \mathcal{L}^n)$: Si $f \in S^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathcal{L}^n)$ entonces $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y $|\nabla f|$ coincide con la norma de la derivada distribucional. Esta misma observacion motiva una definición de *espacio de Sobolev* $W^{1,2}$ para espacios métricos de medida.

Definición 3.8. Dado un espacio métrico de medida (X, d, m), se define el espacio de Sobolev $W^{1,2}(X, d, m)$ como el espacio de Banach $W^{1,2}(X) := S^2(X) \cap L^2(m)$ equipado con la norma $\|f\|^2_{W^{1,2}} := \|f\|^2_{L^2} + \||\nabla f|\|^2_{L^2}$.

Una vez que se tiene definido el objeto $|\nabla f|$, es inmediato definir $\langle \nabla f, \nabla g\rangle$ por polarización: para $f, g \in W^{1,2}(X, d, m)$:

$$\langle \nabla f, \nabla g\rangle := \frac{1}{2}\left(|\nabla(f+g)|^2 - |\nabla f|^2 - |\nabla g|^2\right) \in L^1(m).$$

En general $\langle \cdot, \cdot\rangle$ no es $L^\infty(m)$-bilineal. Sin embargo, esto sí se satisface si $W^{1,2}(X, d, m)$ es un espacio de Hilbert. Diremos que (X, d, m) es *infinitesimalmente Hilbertiano* si $W^{1,2}(X, d, m)$ es un espacio de Hilbert. Históricamente, esta definición resultó de un programa iniciado por N. Gigli en [19] y continuado por N. Gigli, K. Kuwada y S. I. Ohta en [21] y L. Ambrosio, N. Gigli y G. Savaré en [2] en el que se investigó el flujo del calor en espacios métricos de medida.

Para dar sentido a todos los términos de la desigualdad de Bochner, sólo nos resta definir un operador Laplaciano. Para hacer esto se utiliza el enfoque distribucional. Decimos que $f \in W^{1,2}(X)$ *está en el dominio del Laplaciano* ($f \in D(\Delta)$) si existe $h \in L^2(m)$ tal que

$$-\int_X \langle \nabla g, \nabla f\rangle \, \mathrm{d}m = \int_X gh \, \mathrm{d}m$$

para toda $g \in W^{1,2}(X)$. Utilizamos la notación $\Delta f := h$.

Ya que todos los objetos de caracter analítico-funcional que hemos presentado están definidios salvo medida cero respecto a m, necesitamos una forma integrada de la desigualdad de Bochner. Diremos que se satisface la *desigualdad de Bochner débil* $B_w(K, N)$ con $K \in \mathbb{R}$ y $N \in (0, +\infty]$ si para toda $f \in D(\Delta)$ con $\Delta f \in W^{1,2}(X)$ y toda $g \in D(\Delta) \cap L^\infty(m)$ con $g \geq 0$ y $\Delta g \in L^\infty$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\int \Delta g \, |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}m \geq \int g \, \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle \, \mathrm{d}m + K \int g \, |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}m + \frac{1}{N}\int g(\Delta f)^2 \mathrm{d}m.$$

Con estos elementos en mano podemos dar la definición de espacio RCD, originalmente debida a L. Ambrosio, N. Gigli y G. Savaré, [2], (ver también [14]).

Definición 3.9. Sean $K \in \mathbb{R}$ y $N \in (0, \infty]$. Decimos que un espacio métrico de medida (X, d, m) es un *espacio* $\mathsf{RCD}(K, N)$ si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i) m da masa finita a conjuntos acotados,

(ii) X es infinitesimalmente Hilbertiano,

(iii) Se satisface la desigualdad de Bochner débil $B_w(K, N)$ y

(iv) se satisface la llamada *propiedad Sobolev-a-Lipschitz*: Toda $f \in W^{1,2}(X)$ con $|\nabla f| \leq 1$ tiene un representante Lipschitz.

La propiedad mencionada en el inciso (iv) de la definición anterior permite eliminar ciertas familias de espacios patológicos en los que, por ejemplo, las únicas funciones Sobolev son las funciones constantes (ver [20] y [16] para un discusión más profunda). Otra observación pertinente acerca de la definición es que no se está asumiendo que N sea un entero.

Para finalizar la sección presentamos una lista de los principales ejemplos de espacios que satisfacen la propiedad RCD.

(i) Como es natural asumir, toda variedad riemanniana de dimensión n con curvatura de Ricci mayor o igual a K, considerada como espacio métrico de medida con la distancia inducida por la métrica riemanniana y la medida dada por la densidad de volumen es un espacio $\mathsf{RCD}(K,n)$. Esto se sigue del trabajo de von Renesse y Sturm, [41].

(ii) Dado un espacio métrico de medida (X,d,m), el (K,N)-*cono* sobre X es el espacio métrico de medida definido como sigue:

El espacio topológico subyacente, denotado por $\mathrm{Con}_K(X)$ está dado por

$$\mathrm{Con}_K(X) := \begin{cases} X \times [0,\pi/\sqrt{K}]/(F \times \{0,\pi/\sqrt{K}\}) & \text{si} \quad K>0, \\ X \times [0,\infty)/(F \times \{0\}) & \text{si} \quad K \leq 0. \end{cases}$$

La métrica se define de la siguiente manera:

$$d_{\mathrm{Con}_K}((x,s),(y,t)) := \begin{cases} \cos^{-1}\left(\cos_K(s)\cos_K(t) + K\sin_k(s)\sin_k(t)\cos(\text{máx}\{d(x,y),\pi\})\right) & \text{si} \quad K \neq 0, \\ \sqrt{s^2+t^2-2st\cos(\text{máx}\{d(x,y,\pi\})} & \text{si} \quad K=0. \end{cases}$$

donde

$$\sin_K(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t) & \text{si} \quad K>0, \\ t & \text{si} \quad K=0, \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh(\sqrt{|K|}t) & \text{si} \quad K<0, \end{cases} \qquad \cos_K(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{K}t) & \text{si} \quad K>0, \\ 1 & \text{si} \quad K=0, \\ \cosh(\sqrt{|K|}t) & \text{si} \quad K<0. \end{cases}$$

Finalmente, la medida está dada por $m^N_{\mathrm{Con}_K} := \sin^N_K(t)\,\mathrm{d}t \otimes m$.

C. Ketterer mostró en [27] que si (X,d,m) es un espacio $\mathsf{RCD}(N-1,N)$ (con $N \geq 1$) tal que diam $\leq \pi$ entonces $(\mathrm{Con}_K(X), d_{\mathrm{Con}_K}, m^N_{\mathrm{Con}_K})$ es un espacio $\mathsf{RCD}(KN,N+1)$ para $K \geq 0$.

(iii) A. Petrunin mostró en [36] que todo espacio de Alexandrov es un espacio RCD cuando se le equipa con la medida de Hausdorff de la dimensión correspondiente.

(iv) El siguiente es uno de los ejemplos más importantes y habla del contexto en el que caen los espacios RCD dentro de la geometría riemanniana. Consideremos una sucesión $\{(X_i,d_i,m_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de espacios métricos de medida compactos que satisfacen la condición $\mathsf{RCD}(K,N)$. Si la sucesión (X_i,d_i,m_i) converge en el sentido de Gromov–Hausdorff mesurado a un espacio métrico de medida (X,d,m), entonces este espacio límite satisface la condición $\mathsf{RCD}(K,N)$. Para una descripción completa de la definición y propiedades de la convergencia Gromov-Hausdorff mesurada remitimos al lector a [22] y a las referencias ahí contenidas.

4. Funciones armónicas en espacios RCD

Como hemos mencionado antes, las funciones armónicas tienen un lugar privilegiado en el estudio de las variedades riemannianas de curvatura de Ricci acotada inferiormente. Es entonces natural extender este estudio a los espacios RCD. El estimado que presentamos en la sección 2, que permite asegurar que las funciones armónicas son localmente Lipschitz es también válido en el contexto de los espacios RCD (ver, por ejemplo, [26]).

Una de las grandes diferencias entre las variedades riemannianas y los espacios $\mathsf{RCD}(K,N)$ típicos, se da en la estructura local que puede alejarse mucho de ser la de una variedad riemanniana tanto a nivel métrico como topológico. En el caso de las variedades, la estructura local está determinada por el espacio tangente en cada punto: El espacio tangente puede pensarse como una imagen infinitesimal de la variedad. Es posible en el contexto de los espacios métricos de medida obtener un concepto análogo. Para cada $x \in X$ el *cono* *tangente a X en x* se define como el límite (punteado) en el sentido de Gromov-Hausdorff mesurado de una sucesión de bolas métricas $(B(x, r_i), d_i, m_i)$ cuando $r_i \to 0$ (donde d_i es la restricción de la métrica y m_i es la restricción de la medida rescalada por un factor de $1/r_i^N$. En general el cono tangente puede no ser único y a diferencia de las variedades riemannianas, el cono tangente no tiene por qué ser isométrico a un espacio euclidiano. En relación a este tema, el siguiente teorema fue obtenido por A. Mondino y A. Naber en [30].

Teorema 4.1. Sea (X, d, m) un espacio $\mathsf{RCD}(K, N)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una partición (salvo un conjunto de m-medida cero) de X en una cantidad numerable de subconjuntos Borel U_i, cada uno de ellos, $(1+\varepsilon)$-biLipschitz a algún subconjunto Borel (no necesariamente abierto) de $\mathbb{R}^{n_i}$, donde $n_i \leq N$.

El teorema anterior implica que para m-casi todo punto $x \in X$, el cono tangente es en efecto un espacio euclidiano $(\mathbb{R}^{k(x)}, |\cdot - \cdot|, \mathcal{L}^{k(x)})$. Aquellos puntos en los que no ocurre esto se llaman *puntos singulares*. Para hablar un poco más acerca de este tipo de puntos, recordamos la definición de la llamada *densidad de Bishop-Gromov*

$$\theta(x) := \lim_{r \to 0} \frac{m(B(x, r))}{v_{K,N}(r)}$$

donde $v_{K,N}(r) := \omega_N \int_0^r \left|\sin_{K/N-1}\right|^{N-1}$ y $\omega_N := \frac{\pi^{N-2}}{\int_0^\infty t^{N/2} e^{-t}\,\mathrm{d}t}$. Note el lector que en el caso en el que N sea un entero, $v_{K,N}(r)$ coincide con el volumen de la bola métrica de radio r centrada en cualquier punto de la única variedad riemanniana de dimensión N, completa y simplemente conexa de curvatura seccional constante K.

G. De Philippis y N. Gigli demostraron en [12] que $\theta(x)$ existe y si $\theta(x) < \infty$ entonces el conjunto de conos tangentes en x consta de conos verdaderos, es decir de $(0, N)$-conos; Más precisamente, son espacios donde la estructura métrica es un produucto alabeado de la forma $Y \times_{r^{N-1}} \mathbb{R}$ y la medida (digamos μ) está determinada por la fórmula

$$\int f(r, x)\,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} r^{N-1} \int_Y f(r, x)\,\mathrm{d}\nu(x)\mathrm{d}r,$$

donde ν es la medida asociada a Y. En adelante nos referiremos a Y como la *sección del cono*. Es posible probar (y así lo hizo C. Ketterer en [27]) que la sección de un $(0, N)$-cono satisface la condición $\mathsf{RCD}(N-1, N-1)$, siempre que dicho cono satisfaga la condición $\mathsf{RCD}(0, N)$. Esto permite estimar que el diámetro de la sección siempre es menor o igual a π.

Con estas definiciones en mano, podemos enunciar el resultado que el autor demostró en conjunto con G. De Philippis acerca del comportamiento de las funciones armónicas en un espacio RCD. De manera intuitiva, el resultado analiza qué pasa con las funciones armónicas en los puntos más singulares del espacio. Utilizamos la siguiente terminología: un punto singular $x \in X$ se llama *agudo* si todo cono tangente en x es un $(0, N)$-cono con sección de diámetro estrictamente menor que π.

Teorema 4.2 (Teorema 1.1, [13])**.** Sea (X, d, m) un espacio $\mathsf{RCD}(K, N)$ y $u \in D(\Delta)$ con $\Delta u = 0$. Entonces $|\nabla u|(x) = 0$ para todo $x \in X$ punto singular agudo.

Este resultado tiene una consecuencia inmediata: El gradiente superior débil mínimo de una función armónica en un espacio RCD no necesariamente es una función continua (basta imaginar una función armónica no constante). Esto contrasta con el hecho mencionado en la Sección 2 de que toda función armónica en una variedad es suave. Por otra parte, el teorema anterior nos permite concluir que no es posible encontrar un módulo de continuidad para el gradiente de funciones armónicas en variedades riemannianas con curvatura acotada inferiormente (incluso en términos de curvatura seccional)

Teorema 4.3 (Corolario 1.2, [13])**.** Sea ω un módulo de continuidad y $N \in \mathbb{N}$, $D \geq 2$. Entonces existen sucesiones de N-variedades riemannianas (X_k) con $\operatorname{diam}(X_k) \leq D$, $\sec(X_k) \geq 0$, puntos $p_k \in X_k$ y funciones armónicas $f_k : B_1^{X_k}(p_k) \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|f_k\|_{W^{1,2}(B_1^{X_k}(p_k))} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{k \to +\infty} \sup_{p,q \in B_{1/2}^{X_k}(p_k)} \frac{\big||\nabla f_k|(p) - |\nabla f_k|(q)\big|}{\omega(d_{g_k}(p, q))} = +\infty.$$

Así vemos que no es posible obtener un control similar al dado por (2.3) para el gradiente de las funciones armónicas. La idea de la demostración es por contradicción: Si la sucesión de variedades y funciones que se busca no existiera, entonces uno deduciría una cota *a priori* para todas las variedades de curvatura no-negativa. Este estimado sería estable bajo convergencia de Gromov-Hausdorff mesurada, de donde se obtiene que el gradiente superior débil mínimo de toda función armónica es continuo sobre todos los espacios que se obtengan como límite de las variedades mencionadas. Como el gradiente superior débil mínimo se anula en los puntos singulares agudos por el teorema 4.2 y es sencillo construir espacios límite que contengan un subconjunto denso de puntos singulares agudos (ver por ejemplo [1] en conjunto con el ejemplo (2) en [31]), esto da una contradicción.

Para dar una idea más concreta, describiremos a continuación, de manera breve, la construcción de [31] que da lugar a este tipo de espacios con subconjuntos densos de puntos singulares agudos (ver la figura 1). Se comienza con un tetraedro regular X_0 centrado en el origen en $\mathbb{R}^3$. A partir de X_0 construiremos una superficie X_1 tomando la subdivisión baricéntrica de X_0 y moviendo los nuevos vértices ligeramente hacia afuera en la dirección de los rayos que los unen con el origen. Aquí, los vértices originales de X_0 no se mueven. En la figura 1 se ejemplifica este procedimiento solamente para una de las caras de X_0. De esta manera se obtiene una superficie lineal por pedazos y convexa X_1. Realizamos este mismo procedimiento sobre X_1 para obtener otra superficie lineal por pedazos y convexa X_2 y continuamos este proceso para obtener una sucesión de superficies convexas y lineales por pedazos $\{X_i\}$. Es posible probar que cada elemento de esta sucesión es de hecho un espacio $\mathsf{RCD}(0,2)$ (cuando se le considera como espacio métrico de medida con la distancia y medida inducidas por $\mathbb{R}^3$) y que $\{X_i\}$ converge en el sentido de Gromov-Hausdorff mesurado. El espacio límite es topológicamente una esfera, pero tendrá un subconjunto denso de puntos singulares agudos que provienen de los vértices de los X_i. La misma idea se puede usar de manera similar para obtener espacios N-dimensionales con $N > 2$, que tengan un denso de puntos singulares agudos. Finalmente, de manera intuitiva se puede observar que cada X_i es "suavizable", preservando la cota de curvatura, con lo que se puede obtener una sucesión de variedades riemannianas con curvatura no negativa que tenga como límite a un espacio con un subconjunto denso de puntos singulares agudos.

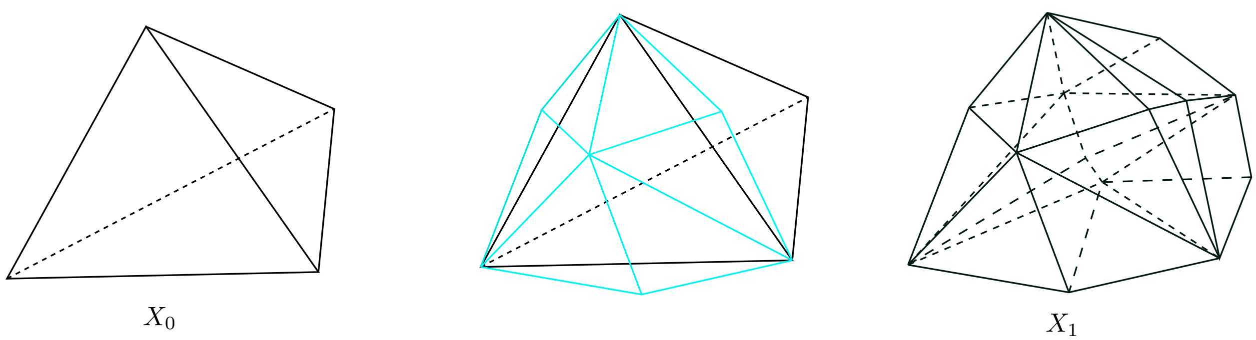

Figura 1: Construcción de un espacio con un denso de puntos singulares agudos.

Ahora daremos una breve explicación de la demostración del teorema 4.2. Referimos al lector al artículo [13] para ver la demostración detallada y completa. La idea es considerar primero el caso en el que (X, d, m) sea un cono en el que el vértice v es un punto singular agudo. En este caso, una función armónica $u : B_1(O) \to \mathbb{R}$ tiene la forma

$$u(r, x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{\alpha_i} \varphi_i(x)$$

donde la coordenada r corresponde a la dirección radial y x a la sección; φ_i son las eigenfunciones del operador Laplaciano sobre la sección del cono con eigenvalor λ_i y $\alpha_i = \alpha_i(N, \lambda_i)$. Esto implica vía cálculos directos que para $R \in (0, 1]$,

$$\int_{B_R(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{\infty} C(a_i, \lambda_i, \alpha_i) \frac{R^{2\alpha_i+N-2}}{2\alpha_i + N - 2}, \qquad \int_{B_1(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C(a_i, \lambda_i, \alpha_i)}{2\alpha_i + N - 2}.$$

De esta manera se obtiene la siguiente propiedad de decaimiento:

$$\fint_{B_R(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m \leq R^{2\alpha_1 - 2} \fint_{B_1(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m \tag{4.1}$$

Nótese que se utiliza la notación

$$\fint_B f \, \mathrm{d}m := \frac{\int_B f \, \mathrm{d}m}{m(B)}.$$

Se puede ver, gracias a la continuidad de eigenvalores que se probó en [22] que $2\alpha_1 - 2 \geq \delta$ con $\delta := \delta(\pi - \mathrm{diam}X) > 0$, de donde

$$\fint_{B_R(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m \leq R^{\delta} \fint_{B_1(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m$$

Entonces $\limsup_{R \downarrow 0} \fint_{B_R(O)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m = 0$ y esto implica $|\nabla u|(v) = 0$.

En el caso de un espacio $\mathsf{RCD}(K,N)$ arbitrario, si se considera un punto singular agudo $x \in X$ y una función armónica $u : B_1(x) \to \mathbb{R}$, se puede demostrar que

$$\fint_{B_{R/2}(x)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m \leq (1-\delta) \fint_{B_R(x)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}m$$

para algún $\delta = \delta(K,N,x) > 0$ y todo $R \leq R_0$ con algún $R_0 = R_0(x) > 0$. Esto se prueba por contradicción: Si no se satisface la propiedad de decaimiento anterior, entonces existen:

- Funciones $u_i \in D(\Delta, B_{R_i}(x))$ para cada R_i de una sucesión $R_i \downarrow 0$ y
- una sucesión de espacios métricos de medida $(X, d/R_i, m/R_i^N, x)$ (dados por el rescalamiento de (X,d,m)) que converge a un cono tangente en x,

de tal forma que $\{u_i\}$ converge en el llamado sentido de Mosco (ver [3]) a una función armónica w en un cono tangente agudo en x. La convergencia en el sentido de Mosco implica que se tiene convergencia a nivel de gradientes superiores débiles mínimos así que w viola la propiedad de decaimiento (4.1). Entonces se tiene también en el caso general que

$$\limsup_{R \to 0} \fint_{B_R(x)} |\nabla u|^2 = 0,$$

de donde es posible demostrar que $|\nabla u|(x) = 0$.

Para finalizar, mencionaremos que los argumentos y técnicas utilizados en [13] son aplicables a una gran cantidad de problemas. Por ejemplo, es natural analizar la validez de desigualdades funcionales con constantes geométricas utilizando estos métodos. En el mismo trabajo del autor en conjunto con G. De Philippis, se mostró por ejemplo que no es posible tener una teoría de Calderón-Zygmund a priori, con una constante que dependa solamente de una cota inferior en la curvatura (incluso seccional) y una cota superior en el diámetro.

Referencias

[1] S. Alexander, V. Kapovitch, y A. Petrunin, *An optimal lower curvature bound for convex hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Illinois J. Math. 52 (2008), no. 3, 1031–1033.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli y G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. 195 (2014), no. 2, 289–391.

[3] L. Ambrosio y S. Honda, *Local spectral convergence in* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ *spaces*, Nonlinear Anal. 177 (2018), part A, 1–23.

[4] W. Barrera, L. Montes de Oca, D. Solis y, M. Navarro, *De la Geometría Riemanniana a los espacios de Alexandrov I: Estructuras por caminos y métricas inducidas*, Abstraction & Application. Volumen 12, 18–41.

[5] W. Barrera, L. Montes de Oca, D. Solis y, M. Navarro, *De la Geometría Riemanniana a los espacios de Alexandrov II: Caminos de longitud mínima y el teorema de Hopf-Rinow*, Abstraction & Application. Volumen 13, 37–55.

[6] W. Barrera, L. Montes de Oca, D. Solis y, M. Navarro, *De la Geometría Riemanniana a los espacios de Alexandrov III: Ángulos y espacios de curvatura acotada por abajo*, Abstraction & Application. Volumen 18, 44–77.

[7] D. Burago, Y. Burago, y S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[8] Y. Burago, M. Gromov, y G. Perelman, *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, (Russian) ; translated from Uspekhi Mat. Nauk 47 (1992), no. 2(284), 3–51, 222 Russian Math. Surveys 47 (1992), no. 2, 1–58.

[9] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. 9 (1999), 428–517.

[10] J. Cheeger y D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry 6 (1971/72), 119–128.

[11] S. Cohn-Vossen, *Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammen- hängenden offenen volständigen Flächenstücken*, Recueil Math. Moscow 43 (1936), 139-163.

[12] G. De Philippis y N. Gigli, *Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded from below*, J. Éc. polytech. Math. 5 (2018), 613–650.

[13] G. De Philippis y J. Núñez-Zimbrón, *The behaviour of harmonic functions at singular points of* RCD *spaces*, preimpresión `arXiv:1909.05220`

[14] M. Erbar, K. Kuwada y K. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces*, Invent. Math. (2015) Vol. 201(3) 993–1071.

[15] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[16] N. Gigli, *An overview of the proof of the splitting theorem in spaces with non-negative Ricci curvature*, Anal. Geom. Metr. Spaces 2 (2014), no. 1, 169–213.

[17] N. Gigli, *C^1 regularity of harmonic functions on Riemannian manifolds*, mathoverflow.net (2015), `https://mathoverflow.net/q/210676`

[18] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. 236 (2015), no. 1113, vi+91 pp.

[19] N. Gigli, *On the heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability*, Calc. Var. Partial Differential Equations 39 (2010), no. 1-2, 101–120.

[20] N. Gigli, *The splitting theorem in non-smooth context*, preimpresión `arXiv:1302.5555`.

[21] N. Gigli, K. Kuwada y S. Ohta, *Heat flow on Alexandrov spaces*, Comm. Pure Appl. Math. 66 (2013), no. 3, 307?331.

[22] N. Gigli, A. Mondino y G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 111 (2015), no. 5, 1071–1129.

[23] N. Gigli y E. Pasqualetto, *Lectures on Nonsmooth Differential Geometry*, SISSA Springer Series, 2, Springer International Publishing, 2020.

[24] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry: an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, Mem. Amer. Math. Soc. 251 (2018), no. 1196.

[25] J. Heinonen y P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. 181 (1998), no. 1, 1–61.

[26] M. Kell, *A note on Lipschitz continuity of solutions of Poisson equations in metric measure spaces*, preimpresión `arxiv:1307.2224`.

[27] C. Ketterer, *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem*, J. Math. Pures Appl. (9) 103 (2015), no. 5, 1228–1275.

[28] P. Li, *Geometric analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[29] J. Lott y C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 3, 903–991.

[30] A. Mondino y A. Naber, *Structure theory of metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 21 (2019), no. 6, 1809–1854.

[31] Y. Otsu y T. Shioya, *The Riemannian structure of Alexandrov spaces*, J. Differential Geom. 39 (1994), no. 3, 629?658.

[32] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, `arXiv:math/0211159`.

[33] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, `arXiv:math/0303109`.

[34] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, `arXiv:math/0307245`.

[35] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, Cham, 2016.

[36] A. Petrunin, *Alexandrov meets Lott-Villani-Sturm*, Münster J. Math. 4 (2011), 53–64.

[37] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000), 243–279.

[38] K. T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. 196 (2006), no. 1, 65–131.

[39] K. T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. 196 (2006), no. 1, 133–177.

[40] V. A. Toponogov, *Riemannian spaces containing straight lines*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 127 1959 977–979.

[41] M.-K. von Renesse y K.-T. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005), no. 7, 923–940.

[42] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 201–228.